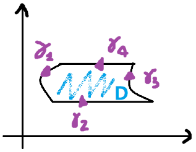
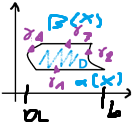
**Teorema di Weierstrass** K ∈ ℝn compatto e f:K🡪 ℝ continua. In K vengono assunti valori max e min **Teorema di valori intermedi** D ∈ ℝn dominio connesso e limitato e f:D🡪 ℝ continua. In D vengono assunti tutti i valori compresi tra max e min **Teorema di Heine-Cantor** K ∈ ℝn compatto, f:K🡪 ℝ continua. f uniformemente continua in **K Teorema di Schwartz** f:A 🡪 ℝ ∈ C2. fxy,fyx continue in (x0,y0) ⇒ fxy=fyx DIM (n=2) F(x)=f(x,y)-f(x,y0) e G(y)=f(x,y)-f(x0,y) FISSATI Lagrange 🡪 F=F(x)-F(x0)=F’(x1)(x-x0)=[fx(x1,y)-fx(x1,y)](x-x0) Lagrange 🡪 F(x)-F(x0)=F’(x1)(x-x0)=fxy(x1,y1)(y-y0)(x-x0) Analogamente, applicando Lagrange su G(y) prima su y poi su x, G(y)-G(y0)=fyx(x1,y1)(y-y0)(x-x0) F=G 🡪 fxy(x1,y1)(y-y0)(x-x0)=fyx(x1,y1)(y-y0)(x-x0) 🡪 fxy(x1,y1) =fyx(x1,y1) INTEPRETAZIONE GEOMETRICA GRADIENTE: z=f(x0,y0) è fx(x0,y0)(x-x0)+fy(x0,y0)(y-y0) piano tangente a f in (x0,y0) **Teorema differenziabilità e** **continuità** f:A ⊂ ℝn 🡪 ℝ, f differenziabile in un certo x∈A ⇒ f continua in A DIM (n=2) Verificare =f(x,y) Definizione differenziabilità🡪 = =f(x,y) e =0 Cauchy-Schwartz |fx(x,y)h+fy(x,y)k| =|∇f(x,y)\*(h,k)|≤ |∇f(x,y)|\*|(h,k)|= |∇f(x,y)|\*<δ<|∇f(x,y)| Posto ε=δ\*|∇f(x,y)| , |fx(x,y)h+fy(x,y)k|<ε ∀ 0<<ε **Teorema** **differenziale** f:A⊂ℝn🡪ℝ,f derivabile in A. Derivate parziali continue in x∈A ⇒f continua DIM (n=2) Verificare f(x+h,y+k)=[f(x+h,y+k)-f(x,y+k)]+[f(x,y+k)-f(x,y)]. Lagrange 🡪 ∃ x1∈(x,x+h) ∧ y1∈(y,y+k) | f(x+h,y+k)-f(x,y+k)-f(x,y)=fx(x1,y+k)h+fy(x+h,y1)k h🡪0 ⇒ x1🡪x; y🡪0 ⇒ y1🡪y ⇒| | = ||≤|h| \*|h|≤|fx(x1,y+k)-fx(x,y)|+|fy(x,y1)-fy(x,y)|. Derivate parziali continue ⇒ =0 ∧ ∀ε>0 ∃δ>0 | |fx(x1,y+k)-fx(x,y)|< ε/2 ∧ |fy(x,y1)-fy(x,y)|< ε/2 ⇒ ⇒ <ε per < δ **Teorema derivabilità funzione composta** Siano x(t),y(t) derivabili in t∈𝕀. f:A ⊂ ℝn 🡪 ℝ, f differenziabile in (x(t).y(t))∈A ∀ t∈𝕀⇒F(t)=f(x(t),y(t)) derivabile in t e F’(t)=∇f(x(t),y(t))\*(x‘(t),y‘(t))=fx(x(t),y(t))\*x‘(t)+fy(x(t),y(t))\*y‘(t) DIM Formula del differenziale (x1,y1)|f(x1,y1)=f(x,y)+fx(x,y)(x1-x)+fy(x,y)(y1-y)+ e, posto (x1,y1)=(x(t+h),y(t+h)) e (x,y)=(x(t),y(t)) ⇒ f(x(t+h),y(t+h))-f(x(t),y(t))=fx(x(t),y(t))[x(t+h)-x(t)]+ fy(x(t),y(t))[x(t+h)-x(t)]+) |z| Divido tutti i membri per h e studio =F’(t)=fx(x(t),y(t))\*+ fy(x(t),y(t))\*+ fx(x(t),y(t)) \* + Per ipotesi di x,y derivabili, i primi due limiti esistono e finiti |z|🡪0 per h🡪0 ⇒ =0 ⇒ = Il limite è somma di due limiti esistenti in ℝ **CONCETTO DI DERIVATA DIREZIONALE** è la variazione di f rispetto al punto λ di modulo 1 **Teorema derivata direzionale funzioni** **differenziali** K ∈ ℝ2 e f:K🡪ℝ differenziabile in (x,y)∈A. f ammette derivata direzionale in (x,y) rispetto ad ogni direzione. Inoltre, se λ=(α,β) si ha che = ∇f(x,y)\*λ =fx(x,y)α+fy(x,y)β DIM Consideriamo funzioni reali , t∈𝕀. Se 𝕀 sufficientemente piccolo, (x+,y+)∈A e definiamo composta F(t)=f(x(t),y(t)). Calcoliamo derivata di F(t) in t=0 🡪 F’(0)===*=* limite esiste perché f(x,y) differenziabile in (x,y) e dal teorema della derivabilità delle composte esiste F’(t) in t=0 =∇f(x(0),y(0))\*(x’(0),y’(0)) ⇒ =∇f(x,y)\*λ **Funzioni con gradiente nullo in un connesso** Se f ammette gradiente nullo in tutti i punti di un connesso A⊂ℝn , f costante in A DIM Derivate parziali nulle ⇒continue ⇒ f differenziabile. Fissato (x0,y0)∈A, definiamo A1= {(x,y) ∈ A| f(x,y) =f(x0,y0)} e A2={(x,y)∈A|f(x,y)≠f(x0,y0)}=Ø poiché in A f costante. Per proprietà topologiche A2 aperto. Dimostrare che A1 aperto: preso P=(x1,y1)∈A, f(x0,y0)=f(x1,y1). Sia 𝕀δ(P) l’intorno circolare di centro P e raggio δ⊂A. Verifichiamo 𝕀δ(P)=A f(x,y)=f(x,y)=f((x1,y1) ∀(x,y) ∈ 𝕀δ(P). Se (x,y)=(x1,y1) non c’è nulla da dimostrare, altrimenti definire ψ(t)=f((x1,y1) + t((x,y)-(x1,y1))) ∀ t∈[0,1]. In t=0 ψ(t)=(x1,y1). In t=1, ψ(t)=f(x,y). ψ’(t)=(∇f((x1,y1)+t((x,y)-t(x1,y1)),(x,y)-( x1,y1))=0 ⇒ ψ(t) costante in A ⇒ ψ(0)=ψ(1) ⇒ f((x1,y1)=f(x,y) ⇒ f costante **Formula Taylor secondo ordine con resto Lagrange** f∈C2 (A),A⊂ℝ2 (x,y)∈A e (h,k)∈ℝ2 | h,k sufficientemente piccoli. ∃θ∈(0,1)| f(x+h,y+k) = f(x,y)+ fx(x,y)h +Fy(x,y)k +{fxx(x+θh,y+θk)h2 + 2fxy (x+θh,y+θk)hk + fyy(x+θh,y+θk)k2} DIM f(1)=f(x+h,y+k) f(0)=f(x,y) f’(0)=fx(x,y)h+fy(x,y)k f’’(θ)=fxx(x+θh,y+θk)h2+ 2fxy(x+θh,y+θk)hk+ fyy (x+θh,y+θk)k2 Utilizzando F(1)=F(0)+F’(0)+F’’(θ) si ottiene la tesi del teorema IN FORMA VETTORIALE u(x,y) v=(h,k) ∇f(u)\*v=fx(x,y)h+fy(x,y)k H(f)=|| 🡪 H(f)\*v = || 🡪 H(f)v\*v=fxxh2+2fxyhk+fyyk2 f(u+v)=f(u)+ ∇f(u)+H(f(u+θv))\*v\*v **Formula di Taylor al secondo ordine con il resto** **di** **Peano** f∈C2(A),A⊂ℝ2 (x,y)∈A e (h,k)∈ℝ2 | f(x+h,y+k) = f(x,y)+fx(x,y)h+Fy(x,y)k+{fxx(x+h,y+k)h2+2fxy(x+h,y+k)hk+fyy(x+h,y+k)k2}+o(h2+k2) DIM Confrontando con Lagrange, basta dimostrare fxx(x+θh,y+θk)h2+2fxy(x+θh,y+θk)hk+fyy(x+θh,y+θk)k2=fxx(x+h,y+k)h2+2fxy(x+h,y+k)hk+fyy(x+h,y+k)k2+o(h2+k2) [fxx(x+θh,y+θk)-fxx(x,y)]+2[fxy(x+θh,y+θk) – fxy(x,y)]+[fyy(x+θh,y+θk)-fyy(x,y)] tende a 0 per (h,k)🡪(0,0). Osserviamo 0≤≤=1 e 0≤≤=1 e, usando |hk|≤(h2+k2), otteniamo -1≤ ≤ ≤=1. f∈C2(A), fxy,fxx,fyy continue in A⇒*=*0. Lo stesso anche per le altre derivate seconde. Il teorema è dimostrato **Massimi e minimi relativi:** **condizione necessaria primo ordine** f: A⊂ℝ2 🡪ℝ e f derivabile in (x0,y0)∈A, se tale punto è max/min relativo per f in A, ∇f(x0,y0)=0 DIM max ∃𝕀δ(x0,y0) | f(x0,y0) ≥ f(x,y)∀(x,y)∈𝕀δ(x0,y0)∩A. Poiché (x0,y0)∈A possiamo scegliere 𝕀δ(x0,y0)⊂A . Fissato y=y0 e x∈(x0-δ, x0+δ), definiamo F(x)=f(x,y0)∀x∈(x0-δ, x0+δ). Per ipotesi, F(x0)=f(x0,y0) ≥ F(x) = f(x,y0). x0 è max relativo in (x0-δ, x0+δ) per cui F’(x)=fx(x,y0) e F’(x0)=fx(x0,y0)=0. Introduciamo G(y)=f(x0,y), y∈(y0-δ, y0+δ)|G(y0)≥G(y)∀ y∈(y0-δ, y0+δ) e, analogamente per x, G’(y0)=fy(x0,y0)=0. Ossia ∇f(x0,y0)=0 **Massimi e minimi relativi: condizione necessaria secondo** **ordine** f: A⊂ℝ2 🡪ℝ e (x0,y0)∈A è un punto di minimomassimo e f∈C2(A) ⇒ DIM min Definiamo F(t)=f(x0+th,y0+tk)∀t∈(-1,1) e h,k molto piccoli ⇒ |(h,k)|=< δ. f∈C2(A) ⇒ f∈C1(A) ⇒ f differenziabile in A. Dalla derivazione della composta, F’(t)= ∇f(x0+th,y0+tk)\*(h,k). x(t)= x0+th y(t)= y0+tk ⇒ x’(t)=h e y’(t)=k. Sviluppando il prodotto scalare, F’(t)=fx(x0+th,y0+tk)h+fy(x0+th,y0+tk)k. fx,fy ∈C1(A) ⇒ fx,fy sono differenziabili in A e, dalla derivazione della composta, F’’(t)=fxx(x0 + th , y0+tk)h2+2fxy(x0+th,y0+tk)hk + fyy(x0+th,y0+tk)k2 Essendo (x0,y0) un minimo e ⇒ F’(0)=0, F’’(0)≥0. F’(0)= fx(x0, y0) h+ fy(x0, y0)k ∀ <δ 🡪 Scegliamo (h,k)=(,0)∈𝕀δ⇒|(h,k)|=⇒<δ fx(x0, y0)+0=0⇒fx(x0, y0)=0. Analogamente fy(x0, y0)0⇒∇f(x0,y0)=0 F’’(0)≥0 🡪 fxx(x0, y0)h2 + 2fxy (x0,y0)hk + fyy(x0,y0)k2 Divido tutto per k2 e pongo δ= 🡪 fxx(x0, y0)δ2+2δfxy(x0,y0)+fyy(x0,y0)=ρ(δ). ρ(δ)≥0ꓯδ∈ℝ. In particolare ρ(0)≥0⇒fyy(x0,y0)≥0. Essendo ρ(δ) polinomio di secondo grado sempre positivo, occorre fxx(x0,y0)≥0 e ∆≤0 ∆=4[fxy(x0,y0)]2-4fxx(x0,y0)fyy(x0,y0)≤0 🡪 fxx(x0,y0)fyy(x0,y0)-[ fxy(x0,y0)]2≥0 ⇒ **Massimi e minimi relativi: condizione sufficiente secondo ordine** A⊂ℝ2 e (x0,y0) punto interno di A. Sia f: A🡪ℝ e f∈C2(A) ①fx(x0, y0)fy(x0, y0)0; fxx(x0,y0),fyy(x0,y0)>0 ; 🡪 Minimo relativo per f ② fx(x0, y0)fy(x0, y0)0; fxx(x0,y0),fyy(x0,y0)<0 ; 🡪 Massimo relativo per f ③ fx(x0, y0)fy(x0, y0)0; 🡪 Né massimo né minimo DIM ①. Analoga ② e per ③, se det<0 la condizione necessaria non è soddisfatta ρ(t)=fxx(x0,y0)t2+ 2tfyx(x0,y0)+fyy(x0,y0) polinomio di secondo grado in t e ∆=(x0,y0)-4fxx(x0,y0)fyy(x0,y0). Per ipotesi, det(Hf(x0,y0))t=fxxfyy->0⇒∆<0⇒ ρ(t)=0ꓯt∈ℝ 🡪 non ammette radici reali. Pongo t= e moltiplico ρ(t) per k2 🡪 fxx(x0, y0)h2 + 2fxy (x0,y0)hk + fyy(x0,y0)k2>0ꓯ(h,k) ∈ℝ2\k=0 g(h,k). k=0 🡪 fxx(x0, y0)h2>0 ⇒ funzione positiva e continua in tutto il dominio e quindi, per Weierstrass, ammette minimo m>0⇒g(h,k)≥0ꓯ(h,k)∈*D*f. Prendiamo, nel dominio escluso (h,k)=(0,0), il punto (). Varrà g()≥0⇒ fxx(x0, y0)h2 + 2fxy (x0,y0)hk + fyy(x0,y0)k2≥0 ꓯ(h,k) ∈ℝ2\(h,k)=(0,0). In (0,0)🡪0≥0 g(h,k) vale in tutto ℝ2. Formula di Taylor col resto di Peano 🡪 f(x0+h,y0+k)-f(x0,y0)=[fxx(x+h,y+k)h2+2fxy(x+h,y+k)hk+fyy(x+h,y+k)k2] ⇒ f(x0+h,y0+k)-f(x0,y0)≥ (h2+k2)+o(h2+k2) per (h,k)🡪(0,0). Definizione di o piccolo 🡪 =0 e dalla definizione di limite ∃δ>0| con < δ ꓯ(h,k) ∈ℝ2\(h,k)=(0,0) 🡪🡪 f(x0+h,y0+k)>f(x0,y0) ꓯ(h,k) ∈ℝ2\(h,k)=(0,0)|< δ⇒(x0,y0) è minimo Una curva si dice rettificabile quando l(ϕ)<+∞**Teorema rettificabilità delle curve** curva ϕ:[a,b]🡪ℝ1 e ∈C1 è rettificabile e L(ϕ)= DIM dimostrare ① l(Ρ)≤ ①l(Ρ)== ≤ Inoltre L()=supl(P) ②ϕ continua in [a,b] ⇒ꓯε>0∃δ>0|ϕ’(t)-ϕ’(s)| < ꓯs,t∈[a,b]| |t-s|<δ. Scegliamo partizione P di [a,b]||tk-tk-1|<δ e P la poligonale corrispondente in [tk-tk-1]🡪ꓯs∈[tk-tk-1] vale ϕ(tk)-ϕ(tk-1)== =(tk-tk-1)ϕ’(s) 🡪(tk-tk-1)ϕ’(s)=ϕk-ϕk-1- ANALISI MODULI |ϕ’(s)|( tk-tk-1)≤ disuguaglianza triangolare e|t-s|<δ 🡪 |ϕ’(s)|( tk-tk-1)≤+(tk-tk-1) 🡪 |ϕ’(s)| ≤ + Integrando su s in [tk-tk-1] ≤🡪 ≤ Sommando tali diseguaglianze per k=1,2,…n 🡪 ≤+ε⇒L(P)≥l(P)+ε≥ 🡪 ꓯε>0 | L(P )-|<ε**Proposizione: la lunghezza di una curva non dipende né dalla parametrizzazione né dal verso** DIM Siano ϕ:[a,b]🡪ℝn e ψ[α,β]🡪ℝn parametrizzazioni diverse della curva γ e g:[a,b]🡪[α,β] cambiamento ammissibile di parametro | g:[a,b] 🡪[α,β] e ϕ(t)=g(ψ(t)) g(t)=s⇒t=g-1(s). ϕ’(t)=g’(ψ(t))ψ’(t) = Considerare cambi g(s)=s e t=g’(s) 🡪=a Dalla derivazione dell’inversa, |g’(g-1(s))|\*= ±1 a seconda che g sia crescente o decrescente. Nel primo caso =. Nel secondo caso == **Proposizione: L’integrale curvilineo non dipende dalla parametrizzazione scelta** DIM Sia ψ[α,β]🡪ℝn un’altra parametrizzazione e g:[a,b]🡪[α,β] cambiamento ammissibile di parametro| s=g(t) e t=g-1(s) = Pongo ϕ(t)=ψ(g(t)) e ψ(s)=ϕ(g-1(s)) 🡪 ψ’(s)=(g-1(s))é ==🡪 **Definizione integrale curvilineo di seconda specie** T(x)= = == Dalla definizione di integrale curvilineo = **Proposizione:** A⊂ℝ2 aperto connesso, f:a🡪 ℝ funzione differenziabile primitiva della forma differenziale ω su A⇒tutte le primitive di ω si ottengono aggiungendo una costante ad f DIM Se f primitiva di ω (ω=df), poiche d(f+c)=df ꓯc∈ℝ f+c è primitiva. Dimostrare che non ce ne sono altre: per assurdo, g≠f+c. Dalla definizione, ω=dg=dfdg-df=d(g-f)=0(g-f)=0 ꓯk=1,…,n⇒∇(g-f)=0. Dal teorema di gradiente nullo in un connesso g-f=cg=f+c **Teorema** sia ω forma differenziale esatta e continua nell’aperto A⊂ℝn e siano x,x0 due punti di A. Data la curva γ regolare a tratti che congiunge x0 e x nel verso che va da x0 a x, =f(x)-f(x0) con f qualsiasi primitiva di ω DIM Sia f primitiva di ω e xk=xk(t), con t∈[a,b], k=1,…,n le n equazioni parametriche di γ. Definizione di forma differenziale, = = = = =f(x1(b), …, xn(b))-f(x1(a),…,xn(a))=f(x)-f(x0) **Teorema caratterizzazione delle forme esatte** A aperto connesso di ℝn, ω forma differenziale continua e ϕ, ϕ1, ϕ2 curve regolari a tratti. Le seguenti proprietà sono equivalenti: ①ω esatta ②ꓯω curva chiusa in A =0③ , ϕ1, ϕ2 stessi estremi e verso di percorrenzaDIM ①⇔②Dal precedente teorema, l’integrale dipende da estremi e verso di percorrenza. Presa f primitiva di ω, =f(ϕ(b))-f(ϕ(a)). Se ϕ chiusa, f(ϕ(b))= f(ϕ(a)) ⇒=0②⇒③ϕ1, ϕ2 stessi estremi x0,x1 e stesso verso di percorrenza. Definiamo ϕ= ϕ1-ϕ2 ottenuta percorrendo ϕ1 da x0 a x1 e ϕ2 da x1 a x0. Curva chiusa e regolare a tratti⇒=0. D’altro canto, dalle proprietà dell’integrale di una forma differenziale===0 ③⇒① Fissiamo x0 di A e, per ogni x∈A definiamo f(x)=, con ϕ curva che congiunge x0 e x. Poiché l’integrale non dipende dalla curva ma solo da estremi e verso, f ben definita. Dimostrare f differenziabile in A e df=ω, ossia f primitiva e ω esatta. Sia x∈A, h∈ℝ\0 | x+he1∈A versore asse x1 di ℝn Consideriamo f(x+ he1)-f(x)= con ϕ1la curva ottenuta aggiungendo ϕ il segmento ρ di estremi x, x+he1 f(x+ he1)-f(x)==. Supponiamo h>0 e definiamo x=(x1,…,xn). Parametrizzo segmento t∈[0,h]🡪 vettore tangente rispetto t === f(x+ he1)-f(x) dividiamo per h ==. a1 continua ⇒dal teorema fondamentale del calcolo integrale, (x)=a1(x) ꓯ x∈A. E, in generale (x)=ak(x) ꓯk=1,…,n e ꓯx∈A ak(x) continua⇒. (x) continua⇒f∈C1⇒f differenziabile e primitiva di ω **Corollario** Se ω forma esatta classe cK nell’aperto connesso A⊂ℝ2, le primitive sono di classe Ck+1 in A DIM f primitiva di ω ⇒ ak=ꓯk=1,…,n ⇒ Se ak di classe K, allora f di classe k+1 **forme differenziali nel piano** A⊂ℝ2 aperto e ω forma differenziale di classe C1 in A. ω esatta in A chiusa DIM ω esatta ⇒ ∃ primitiva f di classe C2|=a(x,y) ∈C1(A) e =b(x,y) ∈C1(A). Deriviamo la prima espressione rispetto a y 🡪 (x,y)=∈C0(A). Deriviamo la seconda rispetto a x 🡪 (x,y)=∈C0(A). Derivate miste continue ⇒ dal teorema di Schwartz sono uguali⇒=∀x∈A **Teorema** ω=a(x,y)dx+b(x,y)dy forma differenziale lineare di classe C1 nel rettangolo aperto R⊂ℝ2. ω chiusa in ℝ esatta DIM Costruiamo primitiva f di ω e fissiamo (x0,y0)∈ℝ.f(x,y)=;(x,y)∈ℝ con la poligonale costituita dal segmento φ1 di estremi (x0,y0)🡪(x,y0); φ2 di estremi (x,y0)🡪(x,y) φ=φ1+φ2  φ1t∈[x0,x] 🡪 φ’1t∈[x0,x] φ2t∈[y0,y] 🡪 φ’2t∈[y0,y] f(x,y)= = +. Deriviamo rispetto a x: =a(x,y0)+ Deriviamo rispetto a y: =b(x,y0). ω chiusa ⇒ =a(x,y0)+ =a(x,yo)+[a(x,t)]yy0=a(x,y)df=ω **Teorema forme differenziali in aperto semplicemente connesso di ℝ2** ω forma differenziale lineare di classe C1 nell’aperto semplicemente connesso A⊂ℝ2.. ω chiusa in A esatta **Teorema di Eulero** Sia f:A🡪 ℝ funzione differenziabile nel cono aperto A⊆ℝ2.. f è omogenea di grado α su A ⇔ vale l’identità di Eulero f(x)=α\*f(x)ꓯx∈A DIM Sia x∈A. Definiamo F:(0,+∞)🡪 ℝ e F(t)=ꓯt>0. f è omogenea di grado α⇔F(t)=f(x) ꓯt∈(0,+∞)⇔F’(t)=0 in (0,+∞) . Calcoliamo la derivata con la formula di derivazione delle composte: F’(t)= = . F’(t)=0 ⇒ =αf(tx) ꓯt∈(0,+∞),ꓯx∈A. In particolare, con t fissato vale per ∈A 🡪 =αf(x) **Teorema forme differenziali in un cono aperto** A⊂ℝ2 un cono aperto in A e ω forma differenziale lineare di classe C1 a coefficienti omogenei α≠-1. ω chiusa in A esatta e f(x,y)= DIM Deriviamo f(x,y) rispetto a x: = . Poiché ω chiusa, = . Essendo a(x,y) omogenea di grado α, dal teorema di Eulero ==αꓯ(x,y)∈A 🡪 =. Analogamente =b(x,y). Poiché a,b∈C1, ,∈C1, f è differenziabile e ω=df **Teorema forme differenziali in aperti stellati** ω forma differenziale nell’aperto stellato A di ℝ3 di classe C1 in A. ω chiusa in A esatta DIM Supponiamo x0=(0,0,0) il centro stellato. ꓯ(x,y,z)∈A definiamo φ: t∈[0,1] di estremi (0,0,0)🡪(x,y,z) interamente contenuto in A perché stellato. Definiamo f(x,y,x)= = = Derivando rispetto a x = Usando la condizione che ω è chiusa, = = = a(x,y,z). Analogamente, rispetto y e z =b(x,y,z) e =c(x,y,z). Poiché a,b,c∈C1, f è differenziabile in A ⇒ ω=df ⇒ ω è esatta in A **1° lemma domini normali** D dominio normale rispetto all’asse x. ꓯδ>0 ∃ partizione di D|il diametro della partizione < δ **Proposizione: additività della** **misura** D dominio normale rispetto all’asse x e {D1,D2,…,Dn} una partizione in domini normali rispetto asse x. m(D)= **2° lemma domini** **normali** Siano P1={D1,D2,…,Dn} e P2={E1,E2,…,En} due partizioni di D in domini normali rispetto asse x. Allora s(P1)≤s(P12) ≤S(P12) ≤S(P2) **Teorema** **integrabilità funzioni continue** Sia D dominio normale di ℝ2 e f:D🡪 ℝ continua. f è integrabile in D DIM D chiuso quindi compatto. Dal teorema di Cantor, f uniformemente continua in D. Fissato ε>0 ∃ δ>0| |f(x,y)-f(x’,y’)|<εꓯ(x,y),(x’,y’) ∈ D | <δ. Supponiamo D normale rispetto asse x. Per il 1° teorema esiste partizione P={D1,D2,…,Dn} di D costituita da domini normali rispetto all’asse x tale che il diametro di ciascun elemento della partizione è minore di δ. Dal teorema di Weierstrass, in ogni Dk la funzione f ammette massimo e minimo. e Per l’additività della misura S(P)-s(p)=. Per la continuità uniforme, = 🡪 0≤S(P)-s(P)< ꓯε>0⇒infS(P)=sups(P)⇒f integrabile **Formula riduzione integrali doppi** [a,b] intervallo chiuso e limitato e D il dominio normale rispetto all’asse x|{(x,y)∈ [a,b] x ℝ| α(x) ≤y ≤β(x)} dove α(x)≤β(x)ꓯx∈[a,b], α(x) e β(x) continue. F:D⊂ℝ2 🡪 ℝ | DIM f continua⇒ integrabile. La funzione che associa a x continua per la continuità dell’integrale⇒ è ben definita. Suddividiamo dominio D in sottoinsiemi Dij considerando suddivisione di [a,b] individuata da k+1 punti di x|a=x0<x1<…<xk=b e k+1 funzioni continue in [a,b] φj(x), j=0,…,k|α(x)=φ0(x)≤φ1(x)≤…≤φk(x)=β(x) ꓯ∈[a,b], i,j∈{1,…,k}. Consideriamo dominio normale rispetto asse x|Dij={ꓯ(x,y)∈ℝ2|xi-1<x<xi,φi-1(x)≤y≤φi(x)}. Possiamo scegliere punti xi e funzioni φj(x)in modo che diametro massimo degli insiemi Dij🡪0 per k🡪+∞. Dall’additività dell’integrale rispetto x, = . Dall’additività rispetto y, **unendo** 🡪 = Indichiamo con mij e Mij massimo e minimo di f sul compatto Dij⊂ℝ2 Per x∈[xi-1,xi]🡪mij(φj(x)-φj-1(x))≤≤Mij(φj(x)-φj-1(x)). Integriamo rispetto x in [xi-1,xi] 🡪 mij ≤≤ Mij Indichiamo m(Dij)=e sommiamo ladisuguaglianza per i,j∈{1,…,k} ≤≤ . Utilizzando questa relazione, ≤≤ . Poiché f integrabile e le espressioni sottolineate in blu sono somme inferiori e superiori di f, ≤≤ Da ciò - |≤ Per continuità uniforme di f in D, ꓯε>0 ∃ δ>0|Mij-mij<ε in ogni Dij e, scegliendolo in modo che diametro<δꓯ i,j∈{1,…,k}. Da ciò | - |≤ε=εm(D). Poiché ciò vale ꓯε>0 , **1° teorema di Guldino** sia S solido generato dalla rotazione di un angolo α di un dominio normale D intorno ad un asse intersecante r. Il volume di S è dato dal prodotto dell’area di D per la lunghezza dell’arco di circonferenza descritta dalla rotazione del baricentro **Tereoma di Gauss-Green** Sia D dominio regolare e f(x,y):D🡪ℝ∈C1. Allora ①(x,y)dxdy= ② (x,y)dxdy = DIM ①(analoga②) Per semplicità, si consideri x,y):D🡪ℝ∈C1 (A) dove A è un aperto contenente D, così abbiamo , **a)** D dominio normale rispetto y|D={(x,y)∈ℝ2|c≤y≤d,φ(y)≤x≤δ(y)}, φ,δ∈C1 ([c,d]), φ(y)<δ(y)ꓯy∈[c,d]. Dalle formule di riduzione, = =. Parametrizziamo frontiera di D in modo da avere un’orientazione positiva =ϕ1Uϕ2Uϕ3Uϕ4

 -φ1: φ2: φ3: -φ4:

SU ϕ2 e -ϕ4 y’(t)=0. L’integrale si riduce a 🡪 (x,y)dxdy= **b)** D dominio normale rispetto x| D={(x,y)∈ℝ2|a≤x≤b,α(x)≤y≤β(x)}, α,β∈C1, α(x)<β(x)ꓯx∈[a,b]. F(x,y)= ϕ=ϕ1Uϕ2 φ1: φ2: F(x,y)==

**SI CALCOLANO LE DERIVATE DI F(x,y) USANDO IL SEGUENTE RISULTATO:**

**Sia f:AXℝ🡪ℝ, A⊂ℝn, A∈C1 e siano a(x),b(x) ∈C1 in A. Allora φ(x)=∈C1 e =f(x,b(x)) e + f(x,a(x)) e +. In particolare + – f(x,α(x))α’(x)**  **La forma differenziale ω=Fxdx+Fydy è esatta su D ⇒=0**

=ϕ1Uϕ2Uϕ3Uϕ4  φ1: φ2: -φ3: -φ4:

=- Su φ2 e φ4 x=0🡪==0 = dt==- Dalle formule di riduzione, (x,y)dxdy= = **c)** D costituito da un numero finito n di domini regolari (rispetto asse x o y) a due a due privi di punti in comune. Possiamo scrivere =. Per Gauss-Green, = . Le orientazioni grafiche sono tra loro opposte, quindi gli integrali dei domini si cancellano e rimangono solo gli integrali delle curve 🡪 = **Tereoma divergenza** D dominio regolare nel piano e F=(F1,F2) applicazione F:D🡪ℝ2 di classe C1. Allora = DIM Con Gauss-Green, == Parametrizzazione frontiera con orientazione positiva φ1: == dt= Se frontiera costituita da curve regolari a tratti, dimostrazione conclusa. Altrimenti si procede come col teorema di Gauss-Green **c**  **Tereoma Stokes** Se F:D🡪 ℝ2 è un’applicazione di classe C1 in D⊂ℝ2 ⇒= DIM Da Gauss-Green, **Forme differenziali in un aperto semplicemente connesso di ℝ2** ω=a(x,y)dx+b(x,y)dy forma differenziale lineare di classe C1 in A⊂ℝ2 aperto semplicemente connesso.ω chiusa in A⇒esatta DIM Provare che ꓯϕ chiusa, regolare a tratti e semplice, =0. Dal teorema di caratterizzazione delle forme differenziali esatte si concluderà che ω esatta ANALISI CASO ϕ SEMPLICE E ORIENTATA IN SENSO ANTIORARIO Sia D⊂ℝ2 dominio limitato di cui ϕ frontiera|=. ===0 **Integrale per parti** Siano f e g funzioni di classe C1 nel dominio regolare D⊂ℝ2 allora = - e = -- DIM Da Gauss-Green, = =. Analogo per l’altra formula **Calcolo dell’area** Sia D⊂ℝ2 domino regolare. Si ha m(D)= =-. Inoltre ꓯα,β∈ℝ|α+β≠0⇒m(D)=. In particolare, se α=β=1, m(D)= DIM se f(x,y)=x e quindi =1, da Gauss-Green = =m(D) = =. Invece, se f(x,y)=y e quindi =1, da Gauss-Green ==m(D)==🡪 α- β=(α+β)m(D) **Cambiamento di variabile integrali doppi** Siano T e D domini regolari di ℝ2 e φ:T🡪D∈C2|≠0. Per ogni funzione continua f:D=ϕ(T)🡪ℝ si ha = DIM Caso f∈C1(ℝ2) e ϕ∈C2(ℝ2). Sia F(x,y) primitiva di f(x,y) rispetto x 🡪 (x,y)=f(x,y). F= e =⇒F∈C1(ℝ2). Supponiamo frontiera di T costituita da curve regolari a tratti di eq. Parametriche FRONTIERA DI D 🡪 Da Gauss-Green, = = =±=±= Inoltre f(x(u,v),y(u,v))det=[]= []+[]=[]- []= - = Dal teorema di Stokes, == per Gauss-Green ⇒ = ± . Determinante Jacobiano continuo e mai nullo per regolarità ⇒ sempre positivo/negativo a seconda dell’orientazione della curva⇒m(D)=± ponendo f=1. Essendo una lunghezza, m(D)>0 ⇒se >0 si sceglie segno positivo, altrimenti negativo⇒ = **Teorema di Cauchy esistenza e unicità locale** supponiamo che f(x,y) sia definita in un intorno **I**x**J** di (x0,y0)∈ℝn della forma**I**x**J** ={(x,y)∈ℝxℝn| |x-x0|≤a,|y-y0|≤b}, dove |x-x0| è il valore assoluto di x-x0 e |y-y0| è la normale del vettore y-y0∈ℝn e f(x,y) è funzione vettoriale. Supponiamo che ①f(x,y) è continua in **I**x**J** ② f(x,y) è lipshitziana rispetto a y uniformemente per x∈**I**, cioè ∃L>0| |f(x,y1)-f(x,y2)|≤L|y1-y2|∀x∈**I,**∀y1,y2∈**J** Esiste δ>0 ed un’unica funzione y=y(x), y: [x0-δ,x0+δ]🡪ℝn definita e derivabile in (x0-δ,x0+δ) e in tale intervallo risolve il problema di Cauchy osservazioni In generale, [x0-δ,x0+δ]⊆[x0-a,x0+a] e si può stimare δ=min{a,}, con M=ma{|f(x,y)| ∈**I**x**J**} **Teorema di Cauchy-corollario** Sia f(x,y) una funzione definita in forma**I**x**J** ={(x,y)∈ℝxℝn| |x-x0|≤a,|y-y0|≤b} a valori in ℝn e supponiamo che f(x,y) e le sue derivate parziali k=1,…,n sono continue in **I**x**J**. Allora Esiste δ>0 ed un’unica funzione y=y(x), y: [x0-δ,x0+δ]🡪ℝn che risolve in tale intervallo il problema di Cauchy **Teorema di regolarità delle soluzioni** sia f(x,y) una funzione di classe Ck(**I**x**J**) per qualche k≥0. Allora la soluzione del problema di Cauchy x0∈ℝ, y0∈ℝn è una funzione di classe Ck+1 ,y: **I**δ🡪ℝn Se f∈Ck allora la soluIone y∈Ck **Teorema di esistenza e unicità globale** Supponiamo che f sia continua in [α,β]Xℝn e localmente lipshitziana rispetto y∈ℝn uniformemente per x∈[α,β] ed esistono due costanti L1 e L2| |f(x,y)|≤L1+L2|y|∀x∈[α,β],∀y∈ℝn Allora ∃y(x)y: [α,β]🡪ℝn che risolve in [α,β]il problema di Cauchy **Teorema di prolungamento massimale** Se f soddisfale ipotesi del teorema di Cauchy di esistenza e unicità locale, allora ogni soluzione dell’equazione differenziale y’=f(x,y) ammette un prolungamento massimale **Proposizione equazioni differenziali tramite forme differenziali**  Siano a(x,y) e b(x,y) funzioni continue in A⊂ℝn e forma differenziale ω=a(x,y)dx + b(x,y)dy esatta e F(x,y) primitiva. Allora ① se y(x) risolve y’=, F(x,y(x))=c,c∈ℝ ② se y(x)∈C1 e ① è verificata, y(x) è soluzione di y’= **Teorema di esistenza e unicità delle soluzioni delle equazioni differenziali lineari** Supponiamo che i coefficienti e il termine noto dell’equazione differenziale lineare siano funzioni continue in [a,b]. Allora per ogni x0∈[a,b] e (y0,y0’,…,y0n-1)∈ℝn esiste un’unica soluzione dell’equazione definita in [a,b] che verifica y(x0)=y0, y’(x0)=y0’,…,y0n-1(x0) =y0n-1 DIM L’equazione può essere scritta in forma normale e yn=f(x,y,y’,…,yn-1)=g(x)-[an-1(x)yn+1+…+a1(x)y’(x)+a0] osserviamo f è continua in [a,b]Xℝ ed è, in tale intervallo, lipschitziana rispetto a tutte le variabili tranne al più x ⇒ |f|≤x+k’|(x,y,y’,…,yn-1)| 🡪 la terza ipotesi dell’unicità globale verifica il teorema **Proposizione 1** Se y1,…,yk sono k soluzioni dell’associata, ogni loro combinazione lineare c1y1+c2y2+…+ckyk (c1,…,ck ∈ℝ) è soluzione dell’equazione differenziale omogenea associata DIM consegue dalla proprietà di linearità **Proposizione 2** ꓯ x0∈[a,b] la funzione u(x) identicamente nulla (u(x)=0 ꓯ x∈[a,b]) è soluzione dell’equazione associata che soddisfa le condizioni iniziali u(x0)=y0, u’(x0)=u0’,…,u0n-1(x0)=y0n-1 DIM u=0 risolve l’equazione omogenea associata e soddisfa le condizioni iniziali ⇒ per l’unicità, non ci sono altre soluzioni **Teorema del Wronskiano** Siano y1,y2,…,yn n integrali particolari dell’equazione differenziale omogenea ① ∃x0∈[a,b] | W(x0)=0 ⇔ y1, y2, …, yn sono linearmente dipendenti② ∃x1∈[a,b] | W(x1)≠0 ⇔ y1, y2, …, yn linearmente indipendenti **Proposizione 3** Siano y1,y2,…,yn n integrali particolari dell’equazione differenziale omogenea. Allora W(x) è identicamente nullo se y1,y2,…,yn linearmente dipendenti oppure diverso da 0 quando linearmente indipendenti **Proposizione 4** Il Wronskiano di n integrali particolari dell’equazione differenziale omogenea è integrale particolare dell’equazione lineare omogenea del primo ordine y’=-an-1(x)y **Teorema di esistenza di n integrali linearmente indipendenti** L’equazione differenziale omogenea a coefficienti in [a,b] ammette sempre un insieme di n integrali linearmente indipendenti **Teorema sull’integrale generale di una equazione differenziale lineare omogenea** Siano y1,y2,…,yn n integrali linearmente indipendenti della omogenea. Allora l’integrale generale è dato dalle combinazioni lineari c1y1+c2y2+…+ckyk (c1,…,ck ∈ℝ) **Teorema sull’integrale** **di una equazione differenziale lineare non omogenea** Sia v0 integrale particolare dell’equazione non omogenea yn+an-1(x)yn-1+…+a1(x)y’+a0(x)y=g(x) e siano y1,y2,…,yn n integrali linearmente indipendenti della omogenea associata. Allora l’integrale generale dell’equazione non omogenea è c1y1+c2y2+…+ckyk +v0 (c1,…,ck ∈ℝ), ossia integrale generale + integrale particolare **Teorema metodo** **della variazione delle costanti** Siano y1,…,yn,x∈[a,b] n integrali lineari indipendenti dell’equazione omogenea associata a y(n)+ an-1y(n-1) + … + a1y’+a0y=g e siano φ1,…,φn le cui derivate soddisfano in [a,b] il sistema lineare 🡪 v(x)= è integrale particolare dell’equazione differenziale non omogenea DIM Il sistema ha soluzione unica perché W(x)≠0 e indichiamo la soluzione con ψi(x). Si indica l’ennupla φi(x)= , i=1,2,…,n Le derivate ξi= φi’ di φi per ipotesi soddisfano il sistema lineare perciò, per ogni x∈[a,b] si ha v’(x)=; …; vn-1(x) =; vn(x)= Dato che ꓯi∈{1,2,…,n} è soluzione dell’equazione omogenea associata, vn+an-1(x) vn-1+…+a1(x)v’+a0(x)v=g(x)+=g(x) ꓯx∈[a,b] Equazioni omogenee coefficienti costanti **Proposizione 1** ꓯλ∈ℝ, eix è soluzione dell’equazione omogenea yn+an-1yn-1+a1y’+a0y=0 ⇔ λ radice reale dell’equazione caratteristica dell’omogenea **Proposizione 2** ꓯλ∈ ℂ, eλx è una soluzione dell’equazione omogenea ⇔ radice complementare dell’omogenea DIM f(x)= eλx, quindi f’(x)=λeλx fn(x)=λneλx 🡪 L(eλx)= eλxp(λ) poiché eλ≠0 ꓯx∈ℝ. Allora L(eλx)=0⇔p(λ)=0 **Proposizione 3** Siano λ1,…,λn n radici distinte dell’equazione caratteristica dell’omogenea. eλ1x,…,eλnx sono linearmente indipendenti ***corollario*** l’integrale generale di un’equazione differenziale omogenea di ordine n a coefficienti costanti la cui equazione caratteristica ha n radici distinte (λ1,…,λn) è c1eλ1x+…+eλnx **Proposizione 4** ꓯλ∈ℝ (rispettivamente ℂ) multipla di ordine r dell’equazione caratteristica u(x)=xkeλx, x∈ℝ, k=0,1,…,r-1 è soluzione reale (complessa) ***corollario*** Sia λ= α+iβ radice complessa multipla di ordine r dell’equazione caratteristica. Allora le funzioni reali xkeλx cos(βx), xkeλx sin(βx), , k=0,1,…,r-1 sono integrali particolari dell’omogenea **Teorema integrale generale di un’equazione omogenea a coefficienti costanti** Se l’equazione particolare di L(y)= yn+an-1yn-1+a1y’+a0y ammette p radici distinte λ1,…,λp di molteplicità r1,…,rp. Allora l’integrale generale è y=(c1,1+c1,2x+…+c1,r1xr1-1)eλ1x +…+( cp,1+c1p,2x+…+cp,r1xr1-1)eλ1x Equazioni non omogenee coefficienti costanti **Proposizione 1** Se a0≠0 e g(x) è polinomio di grado k, esiste un polinomio di grado k che è integrale particolare di y(x) = yn+an-1(x)y(n-1)+…+a1(x)y’+a0(x)y=g(x) **Proposizione 2** Supponiamo che i coefficienti di y(x) = yn+an-1(x)y(n-1)+…+a1(x)y’+a0(x)y=g(x) sono tali che a0=a1=…=am-1=0 e am≠0, 0<m<n e g(x) polinomio di grado k. Esiste un polinomio di grado m+k del tipo xm{cm+cm+1x+-…+cm+kxk} che è l’integrale particolare di y(x) = yn+an-1(x)y(n-1)+…+a1(x)y’+a0(x)y=g(x) **Proposizione 3** Supponiamo che il termine noto di y(x) = yn+an-1(x)y(n-1)+…+a1(x)y’+a0(x)y=g(x) sia del tipo g(x)=eλxpk(x), con λ∈ℝ e p polinomio di grado k. Esiste un polinomio p(x) tale che la funzione eλx è integrale particolare dell’equazione. Inoltre p(x) ha grado k se λ non è radice dell’equazione caratteristica. Se invece è soluzione e molteplicità m, è(x) è del tipo xm(cm+cm+1x+-…+cm+kxk) **Proposizione** **4** Supponiamo che il termine noto dell’equazione sia della forma g(x)= eλx{p1(x)cos(μ x)+p2(x)sin(μx)}. Esistono polinomi q1(x) e q2(x) tali che v(x)=eλx [q1(x)cos(μ x)+q2(x)sin(μx)] è integrale particolare della non omogenea. Inoltre se k è il grado di p1+p2, il polinomio q1+q2 ha grado k se λ±i μ non è radice dell’equazione caratteristica. Mentre ha grado m+k se λ+iμ è radice dell’equazione caratteristica con molteplicità m